CORRIGÉ DU CONCOURS DE RENNES 2010
(école d'Audioprothésiste)

Epreuve de Mathématiques :
correction réalisée par Mr CAUDRELIER Olivier
oc.polyprepas@orange.fr

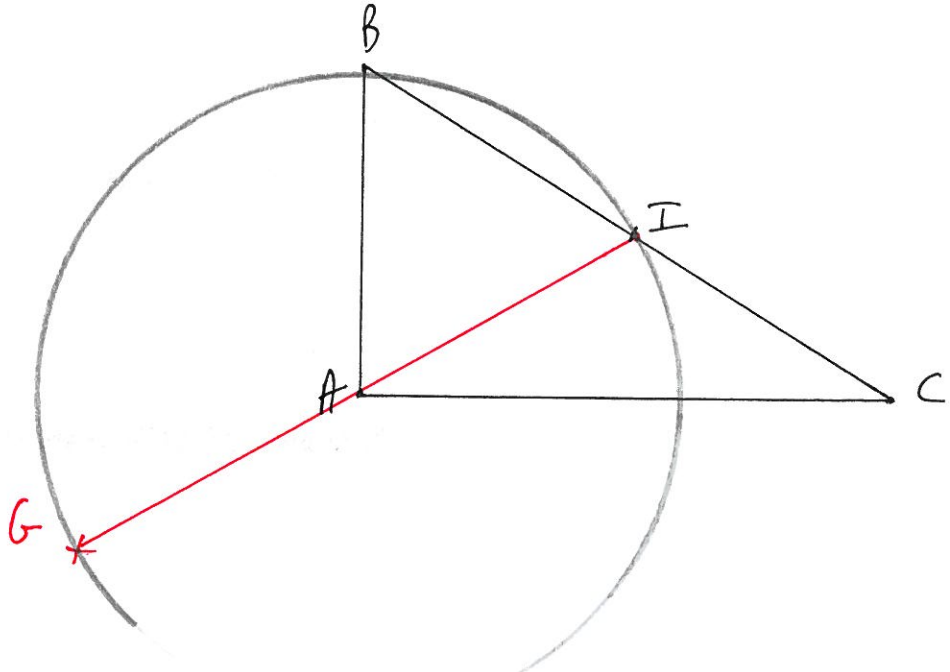
Correction proposée et non officielle

Toute reproduction interdite © *www.ma-prepa-concours.com*

Correction RENNES 2010 – Audioprothésiste – épreuve de Mathématiques -

Exercice I :

1)



2) $4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = 4(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC})$

$$= 4\overrightarrow{GI} + 4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{GI} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{GI} - \overrightarrow{IC}$$

$$= 2\overrightarrow{GI} + 4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}$$

Or (C) est le cercle de centre A passant par I ; donc (C) est un cercle de rayon AI ; de plus, la droite (AI) coupe le cercle en G $\Longrightarrow$ $[IG]$ est un diamètre du cercle (C) et l'on a :

$$\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{IA}$$

En remplaçant, on obtient donc :

$$4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = 2(-2\overrightarrow{IA}) + 4\overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$$

$$4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = -4\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = -(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) =$$

Or $I = mil[BC]$, donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

D'où :

$$4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Ainsi, G vérifie l'égalité : $4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et comme $4 - 1 - 1 = 2 \neq 0$,
G existe et définit donc le barycentre du système $\{(A, 4); (B; -1); (C; -1)\}$

3)

a) On a l'égalité : $4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

D'où : $4\overrightarrow{GA} - \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

$$4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Ainsi, A vérifie l'égalité : $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et comme $2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$,
A existe et définit donc le barycentre du système $\{(G, 2); (B; 1); (C; 1)\}$

A est le barycentre du système $\{(G, 2); (B; 1); (C; 1)\}$
$b = 1$; $c = 1$

b) A est le barycentre du système $\{(G, 2); (B; 1); (C; 1)\}$, donc, pour tout point M du plan, on a (propriété factorale): $2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MA}$

L'égalité cherchée devient donc : $\left\|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MA}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

$$\Leftrightarrow \quad 4MA = 2BC$$

$$\Leftrightarrow \quad AM = \frac{1}{2}BC = IB$$

$\Rightarrow$ *M* appartient au cercle de centre A, de rayon *IB*

Exercice II :

1)

$$I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-2}^{0} = -e^{-0} - e^{-(-2)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{I_0 = e^2 - 1}}$$

2)

$$\boldsymbol{I_{n+1} = \int_{-2}^{0} x^{n+1}.e^{-x}\, dx}$$

Intégration par parties :

$$u = x^{n+1} \Rightarrow u' = (n+1)x^n$$

$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$I_{n+1} = [-e^{-x}.x^{n+1}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -(\mathrm{n}+1)e^{-x}.x^n\, dx =$$

$$I_{n+1} = \left[-e^{-0}.0^{n+1} - \left(-e^{-(-2)}.(-2)^{n+1}\right)\right] + (\mathrm{n}+1)\int_{-2}^{0} e^{-x}.x^n\, dx$$

$$I_{n+1} = [e^2.(-2)^{n+1}] + (\mathrm{n}+1)I_n$$

D'où :

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{I_{n+1} = (-2)^{n+1}.e^2 + (\mathrm{n}+1)I_n}}$$

3) Pour $n = 0$, on a : $I_1 = (-2)^{0+1}.e^2 + (0+1)I_0 \Rightarrow I_1 = -2e^2 + I_0$

$$\Rightarrow I_1 = -2e^2 + e^2 - 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{I_1 = -e^2 - 1}}$$

Pour $n = 1$, on a : $I_2 = (-2)^{1+1}.e^2 + (1+1)I_1 \Rightarrow I_2 = (-2)^2.e^2 + 2I_1$

$$\Rightarrow I_2 = 4e^2 + 2(-e^2 - 1) =$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{I_2 = 2e^2 - 2}}$$

4)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = (x+k)e^{-x}$$

$$\begin{cases} \textit{par lecture graphique :} \quad f_k(-2) = 0 \\ \textit{or :} \quad f_k(-2) = (-2+k)e^{-(-2)} = (-2+k)e^2 \end{cases}$$

D'où : $(-2+k)e^2 = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{k = 2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = (x+2)e^{-x}}$$

5)

a) $(x+2) \geq 0\ pour\ x > -2$ *et* $e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$,

d'où : $f_2(x) = (x+2)e^{-x} \geq 0\ sur\ [-2;+\infty[, a\ fortiori\ sur\ [-2;0]$

et $\mathcal{A}$ représente l'aire comprise entre la courbe représentative de f_2, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 0$

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} f_{-2}(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+2).e^{-x}\,dx = \int_{-2}^{0} x.e^{-x}\,dx + 2\int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx$$

Or $I_{n+1} = \int_{-2}^{0} x^{n+1}.e^{-x}\,dx$, donc, $I_1 = \int_{-2}^{0} x.e^{-x}\,dx$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A} = I_1 + 2I_0}}$$

b)

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = I_1 + 2I_0 = -e^2 - 1 + 2(e^2 - 1)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Rightarrow \mathcal{A} = e^2 - 3}}$$

Exercice III :

Partie A :

1) E_1 : seule la 1ère boule tirée au cours des 3 tirages successifs, est blanche

Pour la 1ère boule : on a 5 boules blanches et 9 boules au total ; donc on a 5 chances sur 9 de tirer une boule blanche

Pour la 2ème boule : la 1ère boule étant blanche, on ne l'a pas remise dans l'urne ; celle-ci est donc à présent constituée de 4 boules blanches et de 4 boules rouges : il y a donc 4 chances sur 8 de tirer une boule rouge (puisqu'on ne veut une boule blanche uniquement au1er tirage)

Pour la 3ème boule : la 2ème boule étant rouge, on l'a remise dans l'urne ; celle-ci est donc toujours constituée de 4 boules blanches et de 4 boules rouges : il y a donc 4 chances sur 8 de tirer une boule rouge (puisqu'on ne veut une boule blanche uniquement au1er tirage)

En terme de probabilités on a donc :

$$p(E_1) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} \Rightarrow \boldsymbol{p(E_1) = \frac{5}{36}}$$

2) E_2 : seule la 2ème boule tirée au cours des 3 tirages successifs, est blanche

Pour la 1ère boule : on a 5 boules blanches et 9 boules au total ; donc on a 4 chances sur 9 de tirer une boule blanche

Pour la 2ème boule : la 1ère boule étant rouge, on l'a remise dans l'urne ; celle-ci est toujours constituée de 5 boules blanches et de 4 boules rouges : il y a donc 5 chances sur 9 de tirer une boule blanche

Pour la 3ème boule : la 2ème boule étant blanche, on ne l'a pas remise dans l'urne ; celle-ci est donc à présent constituée de 4 boules blanches et de 4 boules rouges : il y a donc 4 chances sur 8 de tirer une boule rouge (puisqu'on ne veut une boule blanche uniquement au2ème tirage)

En terme de probabilités on a donc :

$$p(E_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \Rightarrow \boldsymbol{p(E_2) = \frac{10}{81}}$$

E_3 : seule la 3ème boule tirée au cours des 3 tirages successifs, est blanche

Pour la 1ère boule : on a 5 boules blanches et 9 boules au total ; donc on a 4 chances sur 9 de tirer une boule blanche

Pour la 2ème boule : la 1ère boule étant rouge, on l'a remise dans l'urne ; celle-ci est toujours constituée de 5 boules blanches et de 4 boules rouges : il y a donc 4 chances sur 9 de tirer une boule rouge

Pour la 3ème boule : la 2ème boule étant rouge, on l'a remise dans l'urne ; celle-ci est toujours constituée de 5 boules blanches et de 4 boules rouges : il y a donc 5 chances sur 9 de tirer une boule blanche

En terme de probabilités on a donc :

$$p(E_3) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \implies \boldsymbol{p(E_3) = \frac{80}{729}}$$

Partie B :

1) p_n : probabilité de tirer au moins une boule blanche au cours des n tirages

A partir de l'événement inverse : $\overline{p_n}$, probabilité de ne tirer aucune boule blanche au cours des n tirages, on aura $p_n = 1 - \overline{p_n}$

or $\overline{p_n}$ est aussi la probabilité de ne tirer que des rouges au cours des n tirages, soit :

$$\overline{p_n} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\boldsymbol{p_n = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}$$

2)

$$p_n > 0{,}99 \iff p_n = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n > 0{,}99$$

$$1 - 0{,}99 > \left(\frac{4}{9}\right)^n \iff 0{,}01 > \left(\frac{4}{9}\right)^n \iff \ln 0{,}01 > \ln\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\ln 0{,}01 > n.\ln\frac{4}{9} \iff n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{4}{9}} \qquad car\ \frac{4}{9} < 1\ et\ \ln\frac{4}{9} < 0$$

D'où : $n > 5{,}68$

$$\boldsymbol{\implies n = 6}$$